第3卷◆第1期◆版本 1.0◆2022 年
文章类型：论文 刊号（ISSN）：2737-4580(P) / 2737-4599(O)

基于 GM(1,1)模型的居民用电量需求预测研究

徐志强[1] 王怡箐[2] 闫泓杰[1] 杨晨曦[2] 熊昕[1,*]
（1.江汉大学 人工智能学院、人工智能研究院 湖北 武汉 430056；2.江汉大学 医学院 湖北 武汉 430056）

10.12238/jpm.v3i1.4584

[摘 要]为满足城乡居民用电量要求，采用原始 GM(1,1)模型[1]、分数阶累加灰色模型、GM(1,1| $sin+cos$)模型和灰色作用量优化模型对城乡居民用电量进行预拟合预测，得到分数阶累加灰色模型的精度最高。采集苏州、济宁、郑州和南京四个城市的城乡居民用电量资料，采用分数阶累加灰色模型，预测该四个城市未来三年的城乡居民用电量，并结合实际的经济背景对结果分析 2021−2023 年城乡居民用电量的增速逐渐放缓并有一定的回落趋势的原因，对苏州、济宁、郑州和南京四个城市的城乡居民用电量的供给有一定的参考作用。

[关键词]分数阶累加灰色模型；灰色预测；城乡居民用电量

1 概况

随着科学技术的快速发展和经济实力的日益提升，各种各样的电子产品融入了人们的生活。它可以使我们的生活更方便、更舒适，有效地保证了社会稳定、经济繁荣和居民生活水平的提高。

电能是工业之母，是经济发展的动力，是维持现代社会正常运转的必要条件。在基于现代科技的社会，电能被各大领域广泛应用，人类社会已经离不开电能。

本文根据居民用电量的特性，不考虑其它因素的影响，从用电量的数据出发进行分析，研究其变化规律与发展趋势。当电能数据匮乏时,常采用灰色预测模型进行需电能需求预测。但当数据序列存在一定的波动性时，可能造成灰色预测模型的不准确，故本文通过用原始累加生成算子替换成分数阶累加生成算子得到的优化模型进行居民生活用电量预测并与原始 GM(1,1)模型、GM(1,1| $sin+cos$)模型和灰色作用量优化模型进行对比，分析预测结果，验证了分数阶累加灰色模型的准确性，亦给居民生活用电量的预测与配置提供了参考。

2 模型建立

2.1 灰色 GM(1,1)模型[1]

灰色系统理论是由华中科技大学教授邓聚龙于 1982 年创立的，是一种研究少数据，贫信息的不确定性问题的一种新方法，常用于研究信息部分清晰但带有不确定现象的一套理论。灰色预测方法目前已被广泛应用于各个领域的预测之中[2-4]。尤其在能源行业。从能源消耗的品种来看，电力和热力是生活中最主要的消费种类。电力作为一种特殊的能源商品具有两大特性:生产、输送与消费同时进行的特性；不可储存的特性。由此决定了电力的需求与经济发展的密切相关性。由于电力这种商品的生产基础设施建设时间较长，资金规模较大，为避免其产生对社会稳定及投资环境不良的影响，建立相关的早期预警系统就显得尤为重要。常见的电力消费量的预测有多元回归分析[5]、指数回归-ARMA 模型[6]等。GM(1,1)预测模型，在能源管理工程方面，为长期预测问题提供了更好的预测优势。在预测城市人口规模，取得了良好的结果。

定义 2.1.1 设非负原始序列 $X^0=(x^0(1),x^0(2),\cdots,x^0(n))$ 对 X^0 作一次累加，得到生成数列为

$$X^1=(x^1(1),x^1(2),\cdots,x^1(n)),x^1(k)=\sum_{i=1}^{k}x^0(i),k=1,2,3,\cdots,n \quad (2.1.1)$$

Z^1 为 X^1 的紧邻均值生成序列

$$Z^1=(z^1(2),z^1(3),\cdots,z^1(n)) \quad (2.1.1)$$

其中

$$z^1(k)=\frac{1}{2}(x^1(k)+x^1(k-1)),k=1,2,\cdots,n \quad (2.1.2)$$

则称 $x^0(k)+az^1(k)=b$ 为 GM(1,1)模型的基本形式。

对定义 2.1.1 进行如下说明：

（1）符号 GM(1,1)的含义：G 代表 Grey，即灰色；M 代表 Model，即模型；(1,1)表示含有一个变量的一阶方程。

（2）称 a 为发展系数,M 的大小及符号,反映了 $X^0(k)$ 及 $X^1(k)$ 的发展态势。

如果 a 为负，那么态势是增长的，a 的绝对值越大，增长

第3卷◆第1期◆版本 1.0◆2022 年
文章类型：论文 刊号（ISSN）：2737-4580(P) / 2737-4599(O)

越快；如果 a 为正，那么态势是衰减的，a 的绝对值越大，衰减越快。

（3）称 b 为灰作用量。作为系统，它的作用量应是外生的，即外部加入的或者是事先给定的。

定义 2.1.2 设 X^0 为非负序列

$$X^0=(x^0(1),x^0(2),\cdots,x^0(n)) \qquad (2.1.3)$$

X^1 为 X^0 的 1–AGO 序列，

$$X^1=(x^1(1),x^1(2),\cdots,x^1(n)) \qquad (2.1.4)$$

其中

$$x^1(k)=\sum_{i=1}^{k}x^0(i),k=1,2,\cdots,n \qquad (2.1.5)$$

Z^1 为 X^1 的紧邻均值生成序列

$$Z^1=(z^1(2),z^1(3),\cdots,z^1(n)) \qquad (2.1.6)$$

其中

$$z^1(k)=\frac{1}{2}(x^1(k)+x^1(k-1)),k=2,\cdots,n \qquad (2.1.7)$$

若 $\Phi=[a,b]^T$ 为参数列，且

$$Y=\begin{bmatrix}x^0(2)\\x^0(3)\\\vdots\\x^0(n)\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-Z^1(2)&1\\-Z^1(3)&1\\\vdots&\vdots\\-Z^1(n)&1\end{bmatrix} \qquad (2.1.8)$$

则 GM(1,1)模型 $x^0(k)+az^1(k)=b$ 的最小二乘估计参数列满足

$$\Phi=[a,b]^T=(B^TB)^{-1}B^TY \qquad (2.1.9)$$

定义 2.1.3 设 X^0 为非负序列，X^1 为 X^0 的 1–AGO（即一次累加）序列，Z^1 为 X^1 的紧邻均值生成序列，则称

$$\frac{dx^1}{dt}+ax^1=b \qquad (2.1.10)$$

为 GM(1,1)模型 $x^0(k)+az^1(k)=b$ 的白化方程，也叫影子方程。

定理 2.1.1 设 B,Y,Φ 如定义 3.2.3 所述，$\Phi=[a,b]^T=(B^TB)^{-1}B^TY$，则有

（1）白化方程 $\frac{dx^1}{dt}+ax^1=b$ 的解（也称时间响应函数）为

$$\hat{x}^1(k)=(x^1(1)-\frac{b}{a})e^{-ak}+\frac{b}{a} \qquad (2.1.11)$$

（2）GM(1,1)模型 $x^0(k)+az^1(k)=b$ 的时间响应函数序列为

$$\hat{x}^1(k+1)=(x^0(1)-\frac{b}{a})e^{-ak}+\frac{b}{a},k=0,1,\cdots,n-1 \qquad (2.1.12)$$

（3）还原值

$$\hat{x}^0(k)=(1-e^a)(x^0(1)-\frac{b}{a})e^{-a(k-1)} \quad k=1,2,\cdots,n \qquad (2.1.13)$$

所以得到 GM(1,1)模型灰色预测的公式为

$$\hat{x}^0(k)=C(1-e^a)e^{-a(k-1)} \quad k=1,2,\cdots,n \qquad (2.1.14)$$

2.2 灰色 GM(1,1)模型的适用范围

在对问题建立对应的数学模型时，应先明确适用范围，保证预测的准确性。灰色 GM(1,1)模型也是如此，模拟与预测精度与常数 a 有着密切的关系，适用范围可以由其范围来表达，具体如下：

（1）当 $-a\le 0.3$ 时，GM(1,1)模型适用于中长期预测；

（2）当 $0.3\le -a\le 0.5$ 时，GM(1,1)模型适用于短期预测，不适用于中长期；

（3）当 $0.5\le -a\le 0.8$ 时，GM(1,1)模型适用于短期预测要慎用；

（4）当 $0.8\le -a\le 1$ 时，应该采用残差修正 GM(1,1)模型后方可使用；

（5）当 $-a\ge 1$ 时，不宜采用 GM(1,1)模型，误差会很大；

（6）当 $a\ge 2$ 时，GM(1,1)模型则失去预测的意义。

2.3 分数阶累加生成算子介绍

GM(1,1)模型由于其特点本身会导致其预测精度不高。效果常常难以达到人们要求的程度，科研人员发现有几种方法能够提高 GM(1,1)模型的精度：

2.3.1 改变模型序列的阶数

吴利丰提出分数阶累加灰色模型，在预测装备费用上，发现分数阶累加 GM(1,1)模型的拟合精度优于传统 GM(1,1)模型。

杨保华等人建立的分数阶离散灰色 GM(1,1)幂模型，在高速公路地基沉降和中国高新技术产业 R&D 发展上具有良好的预测精度。

2.3.2 改变灰色作用量

肖新平等人探讨了背景值对灰色 GM(1,1,α)的预测精度的影响，通过实例验证了理论的正确性，提高了灰色模型在时间应用中的有效性。

毛树华等人将 $b_1 sinpk + b_2$ 作为灰色作用量，建立了 GM（1,1| sin ）模型，将模型应用于交通流的预测中，得到了较好的预测结果。

许泽东等人将 $b_1 sinpk + b_2 cosqk + b_3$ 作为灰色作用量，建立了 GM(1,1| $sin + cos$)模型，结合粒子群算法优化参数，将其应用于交通流的预测中，具有较强的适用性和拟合性。

2.3.3 改变背景值

肖新平等研究了 GM(1,1,α)的背景值的取值问题，发现背景值的变化能显著影响相对误差，得出了背景值与相对误差的具体表达式。鲁红坤等人研究背景值对 GM（1,1）模型的影响，优化背景值后的 GM（1,1）模型能适应更强，并且具有较好的精度。张鹏等人利用鲸鱼优化算法对各种灰色模型的背景值进行搜索优化，建立了 WOA–灰色模型，并通过实例计算得出 WOA 算法优化背景值后的灰色模型能取得更好的预测精度。

2.4 GM(1,1)模型的分数阶累加生成算子。

首先，设初始序列为 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$ 。则初始序列 $X^{(0)}$ 的 r 阶累加生成序列为：

$$X^{(r)} = X^{(0)} S^* = (x^{(r)}(1), x^{(r)}(2), \cdots, x^{(r)}(n)) \qquad (2.4.1)$$

其中，$x^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)} x^{(0)}(i)$，$k = 1, 2, \cdots, n$，$S^*$ 为 r 阶累加生成算子

初始序列 $X^{(0)}$ 的 r 阶累减生成序列为：

$$X^{(-r)} = X^{(0)} D^* = (x^{(-r)}(1), x^{(-r)}(2), \cdots, x^{(-r)}(n)) \qquad (2.4.2)$$

其中，$x^{(-r)}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(r-i+1)} x^{(0)}(k-i)$，$k = 1, 2, \cdots, n$，$D^*$ 称为 r 阶累减生成算子。

在分数阶累加生成算子中，将 $x^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)} x^{(0)}(i)$ 中 $x^{(0)}(i)$ 的系数记为 $a_{ki} = \frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)}$。

当分数阶累加生成算子的阶数 r 取不同值时，系数 a_i 具有不同的变化趋势。r 阶累加生成算子不仅包含了一阶累加生成算子的性质，还具有更丰富的特性。当阶数 r 取不同的值时，r 阶累加生成算子中各分量具有不同的权重，r 的值越小表示新信息的优先性更强。

2.2 分数阶累加灰色模型

将原始 GM(1,1)中一阶累加算子转换为分数阶累加生成算子，则得到分数阶累加灰色模型。

$x^{(r)}(k) - x^{(r)}(k-1) + az^{(r)}(k) = b$ 称为分数阶累加灰色模型，即 FAGM(1,1) (Fractional Accumulation Grey Model)。

微分方程 $\frac{dx^{(r)}(t)}{dt} + ax^{(r)}(t) = b$ 称为分数阶累加灰色模型的白化方程，其中 a 和 b 分别称为模型的发展系数和灰色作用量。

根据灰色预测模型理论，采用最小二乘法可以得到 FAGM(1,1)模型的参数估计 $\hat{u} = [a,b]^T$，

且满足：

$$\hat{u} = [a,b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \qquad (2.4.3)$$

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(r)}(2) - x^{(r)}(1) \\ x^{(r)}(3) - x^{(r)}(2) \\ \vdots \\ x^{(r)}(n) - x^{(r)}(n) \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} Z^{(r)}(2) & 1 \\ Z^{(r)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ Z^{(r)}(n) & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.4.4)$$

得到估计的参数后，对模型的白化方程求解，得到分数阶累加灰色模型的时间响应序列为：

$$\hat{x}^{(r)}(k) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}, \qquad k = 1, 2, \cdots, n \qquad (2.4.5)$$

对时间响应序列进行分数阶累减生成操作，得到模型的还原序列为：

$$\hat{x}^{(r)}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(r-i+1)} \hat{x}^{(r)}(k-i), \qquad k = 1, 2, \cdots, n \qquad (2.4.6)$$

本文我们以灰色预测模型从宏观的角度来对城乡居民用电量进行预测，采用的灰色模型包括：原始 GM(1,1)模型、分数阶累加灰色模型、灰色作用量优化模型、GM(1,1| $sin + cos$)模型。采用平均绝对百分比误差(MAPE)来定量评价灰色预测模型的建模误差和预测误差。平均绝对百分比误差(MAPE)的计算公式为

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\% \qquad (2.4.7)$$

3 城乡居民用电量预测与分析

自吴利丰于 2013 年提出分数阶累加灰色模型以来，大量的学者将此模型应用于各个领域的预测问题上，如预测京津冀地区轻度污染日数和年平均 PM2.5 浓度，本文通过对分数阶累

预算与造价
第3卷◆第1期◆版本 1.0◆2022 年
文章类型：论文 刊号（ISSN）：2737-4580(P) / 2737-4599(O)

加灰色模型、原始 GM(1,1)模型、GM(1,1| $sin+cos$)模型和灰色作用量优化模型的对比，验证分数阶累加灰色模型的准确性和有效性。其中表 1 为苏州、济宁、郑州和南京四个城市 2015 年至 2020 年城乡居民用电量的统计数据，由表 1 可以看出，苏州、济宁和郑州三个城市的数据具有一定的波动性，故可采用分数阶累加灰色模型来预测。

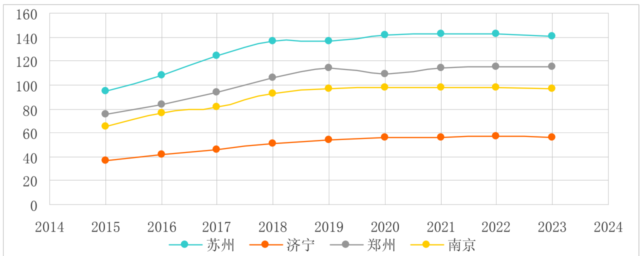

图1 各城市2015年—2020年城乡居民用电量

数据来源：各市统计年鉴[18]

原始 GM(1,1)模型、分数阶累加灰色模型、GM(1,1| $sin+cos$)模型和灰色作用量优化模型对上述四个城市的预测结果见表 2。由表 2 可看出四种模型的拟合精度都较高，拟合结果的平均绝对百分比误差由低到高为分数阶累加灰色模型，原始 GM(1,1)，灰色作用量优化模型，GM(1,1| $sin+cos$)模型。结果表明在数据具有微小波动性时，分数阶累加灰色模型在四种模型中的优化效果最好，并且在几乎没有波动的济宁数据上也有比较好的优化效果。

如图 2 预测的结果，从 2020 年开始各城市城乡居民电量增速逐渐放缓并有一定的回落趋势。随着经济的复苏，城乡居民用电量也会有一定的回升，但该模型未将该因素考虑在内，可能会导致真实值一定程度上高于预测值。

表 1 平均绝对百分比误差

城市	原始GM(1,1)模型	分数阶累加灰色模型	灰色作用量优化模型	GM(1,1| $sin+cos$)模型
苏州	0.0274	0.0098	0.0277	0.0517
济宁	0.0176	0.0096	0.0180	0.0317
郑州	0.0375	0.0240	0.0382	0.0723
南京	0.0246	0.0201	0.0252	0.0398

表 2 城乡居民用电量预测值

年份	苏州	济宁	郑州	南京
2021	142.7928	56.3777	114.633	98.1601
2022	142.1676	56.6167	115.191	97.7972
2023	140.4349	56.4108	114.844	96.6715

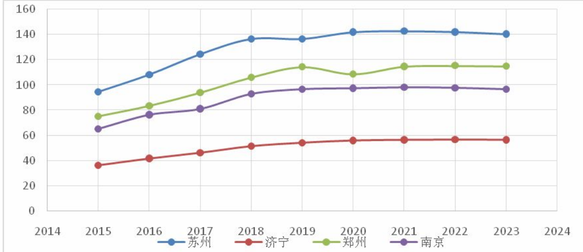

图2 城乡居民用电量预测值

4 结束语

本文通过分数阶累加灰色模型、原始 GM(1,1)模型、GM(1,1| $sin+cos$)模型和灰色作用量优化模型对城乡居民用电量预测问题精度的对比，可看出分数阶累加灰色模型具有更高的预测精度。随着我国推进实现碳达峰、碳中和的战略目标，构建以新能源为主体的新型电力系统，中国对电能的需求正逐渐增长，而火力发电在发电量中占有较大的比重，准确的预测居民生活用电量能有对建立资源节约、环境友好型社会有较强的指导意义。本文给出的分数阶累加灰色模型较为合理的预测出了居民生活用电量的趋势，为居民生活用电量的预测提供了一个可靠的方式。

[参考文献]

[1]Ju-Long Deng. Control problemsof grey systems[J]. North-Holland,1982,1(5):288-294

[2]唐天国，万星，刘浩吾．高边坡安全监测的改进 GM(1，1）模型预测研究[J]．岩石力学与工程学报，2005，24(2):307-312

[3]罗晓玲，周建新，王玉兰．基于 GM(1,1)模型在高等学校招生人数预测中的应用研究—以四川省普通高校为例[J].贵州大学学报:自然科学版，2008，25(4):342-345

[4]刘小舟．灰色系统理论在火灾预测中的应用[J]．武警学院学报，2007，23(2):55-57

[5]蔡火娣，韩兆洲，马文超．对我国电力消费量的多元回归分析[J]．统计与决策，2008(14):101-103

[6]查奇芬，焦小伟．指数回归—ARMA 模型在我国人均生活电力消费量预测中的应用[J]．数理统计与管理，2009，28(6):1122-1126

基金项目：本文得到了江汉大学省级大学生创新训练项目基金的支持，编号为 S202011072030。